Расчет реализованной волатильности на историческом промежутке времени

Владимир Твардовский,
Управляющий директор ООО «УК «Финам менеджмент»,
Хедж-фонд «Quantum Parity»

ФИНАМ

Москва, МОК, 2016

Какие виды волатильностей мы знаем?

- Историческая волатильность, HV
- Подразумеваемая волатильность IV
- Реализованная волатильность RV

Историческая волатильность

Ширина полос Боллинджера	$W(n) = 2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - SMA(p,n)\right)^2}, \quad SMA(p,n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$
Индикатор ATR	$ATR(n) = MA(TR,n), \quad TR_i = \max\left(\lvert H_i - L_i\rvert; \quad \lvert H_i - C_{i-1}\rvert; \quad \lvert L_i - C_{i-1}\rvert\right)$
Среднеквадратичное отклонение доходностей	$\sigma(n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - SMA(r,n)\right)^2}, \quad r_i = \ln\frac{p_i}{p_{i-1}}$
Среднеквадратичное отклонение цен (= 1/2W)	$StdDev(n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - SMA(p,n)\right)^2}$
H-L – volatility	$\sigma_{H-L}(n) = 100 \cdot \frac{EMA(H-L,n)}{EMA(C,n)}$

Есть и множество других формул для расчета волатильностей.

Исторические волатильности Сбербанка

Подразумеваемая волатильность

Изначально, IV – это замыкающий параметр в модели Блэка – Шоулза.

Как известно, модель Блэка-Шоулза плохо описывает реальный рынок и вынуждает при калибровке модели к рынку вместо одного параметра IV использовать двумерную поверхность IV(K,T,t), которая изменяется во времени случайным образом.

Т.е., волатильность не только не является константой, а в каждом конкретном случае представляет реализацию двумерного случайного процесса.

Поскольку формулы Б-Ш – это де факто стандарт индустрии, то говоря о подразумеваемой волатильности, трейдеры имеют ввиду ту волатильность, которая при подстановке в формулы Б-Ш дает правильное значение цены опциона.

ФИНАМ

IV – это медленные переменные, а цена опциона - быстрые

Фактически, на опционном рынке торговля идет не временем, не ценой базисного актива, а волатильностью.

Это не означает, что если вы покупаете опцион по волатильности дешево, а продаете его по волатильности дорого, то вы обязательно заработаете.

Это означает, что трейдерам удобнее выходить из пространства быстрых переменных – цен опционов в пространство медленных переменных – подразумеваемых волатильностей.

IV меняется со временем, но эти изменения происходят медленнее, чем изменения цен самих опционов, зависящих от множества других переменных.

И если уж мы перешли в пространство, где ценой опциона является не цена базисного актива, а волатильность, то хотелось бы понимать – что такое дорого, а что такое дешево в терминах волатильности. И вот на этот вопрос отвечает реализованная волатильность.

RV – реализованная волатильность

Реализованная волатильность (RV) – это тот уровень подразумеваемой волатильности, при котором вам в прошлом было бы безразлично: покупать опцион или продавать. То есть, реализованная волатильность – это тот уровень подразумеваемой волатильности при котором реализованный финансовый результат сделки покупки опциона был бы равен финансовому результату сделки продажи опциона.

Соответственно, если бы мы в прошлом купили опцион по волатильности меньшей, чем реализованная, то заработали бы на такой покупке к моменту исполнения.

Если бы мы продали в прошлом опцион по волатильности выше реализованной, то тоже заработали бы на этой операции.

Беда в том, что мы не можем заранее определить какой будет реализованная волатильность. Это определяется постфактум. Единственный способ определить реализованную волатильность – это посчитать ее после того как траектория движения цены Б.А. уже реализовалась.

Теорема замещения

Она же теорема замещения (арбитража). Применительно к опционам теорема замещения может быть сформулирована так:

Стоимость опциона равна стоимости его дельта-хеджирования

Конечно, это справедливо в том случае, если подразумеваемая волатильность справедлива, т.е. совпадает с реализованной. В общем же случае имеем:

- если $RV > IV$, то PnL > 0,
- если $RV < IV$, то PnL < 0,
- если $RV = IV$, то PnL = 0.

Где PnL – сумма финансовых результатов покупки опциона и процесса его дельта-хеджирования.

PnL дельта-хеджирования опциона Call

$$PnL = PnL(Call) + PnL(Hedge)$$

$$PnL(Call) = -C(0) \cdot e^{RT} + \begin{cases} p(T) - K, & если \;\; p(T) > K \\ 0, & если \;\; p(T) \le K \end{cases}$$

Стоимость хеджирующего портфеля *H(t)* в любой момент времени *t* определяется так:

$$Hedge(t) = Cash(t) + n(t) \cdot p(t)$$

Тогда *PnL* собственно процесса дельта-хеджирования можно записать так:

$$PnL(Hedge) = Cash(T) - Cash(0) \cdot e^{RT} + n(T) \cdot p(T)$$

Вычисление PnL(H)

$$dCash(t) = -dn(t)\cdot p(t)$$

$$Cash(T) = Cash(0) - n(+0)\,p(0) - \int_{+0}^{T}\frac{dn}{dt}\cdot p(t)dt$$

$$PnL(H) = Cash(0)\cdot\left(1-e^{RT}\right) + n(T)\cdot p(T) - n(+0)\,p(0)e^{RT} - \int_{+0}^{T}\frac{dn}{dt}\cdot p(t)dt$$

$$PnL(H) = \left(Cash(0) - n(+0)\,p(0)\right)\cdot\left(1-e^{RT}\right) + \int_{+0}^{T}\frac{dp(t)}{dt}\cdot n(t)dt$$

$$PnL(H) = +\int_{+0}^{T}\frac{dp(t)}{dt}\cdot n(t)dt$$

Вычисление реализованной волатильности

Уравнение определяющее уровень реализованной волатильности

$$PnL(CALL) + PnL(Hedge) = 0$$

Собирая все предыдущие формулы и, вспоминая, что для процесса дельта-хеджирования опциона колл

$$n(t) = -\Delta_C(t) = -\Delta_C(p(t), K, T-t, \sigma)$$

Получаем уравнение

$$Call(p(0), K, RV, T) = -e^{-RT}\int_{+0}^{T}\frac{dp(t)}{dt}\cdot\Delta_C(t)dt + e^{-RT}\begin{cases} p(T)-p(0), & если\ p(T) > p(0) \\ 0, & если\ p(T) \le p(0) \end{cases}$$

Решив которое относительно RV, получим искомый ответ

RV для ATM-опционов

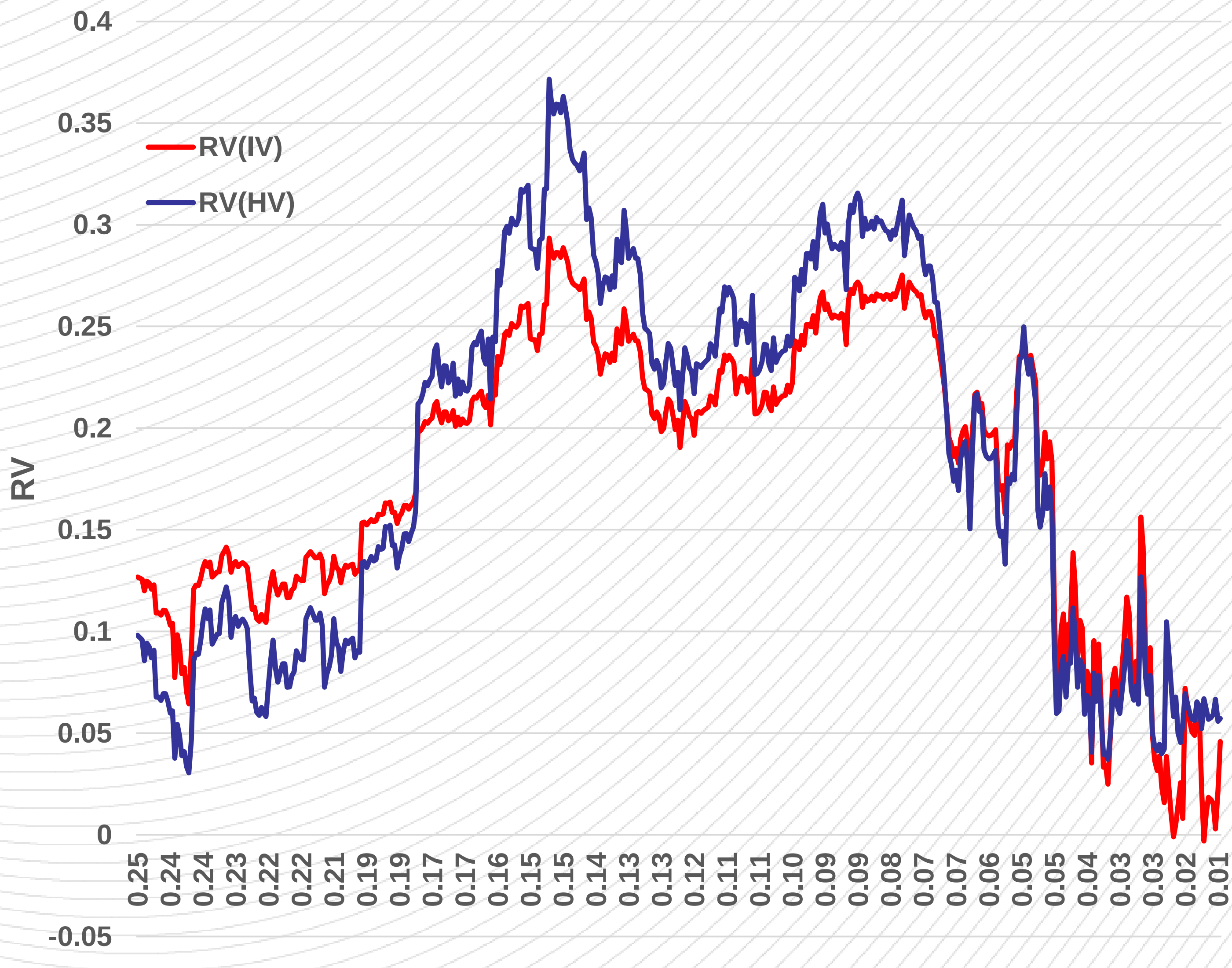
Для ATM-опциона CALL со страйком K=p(0) хорошее приближение для выражения Call дает следующая формула:

$$Call(p(0), p(0), RV, T) \cong \frac{p(0)}{\sqrt{2\pi}} RV \sqrt{T}$$

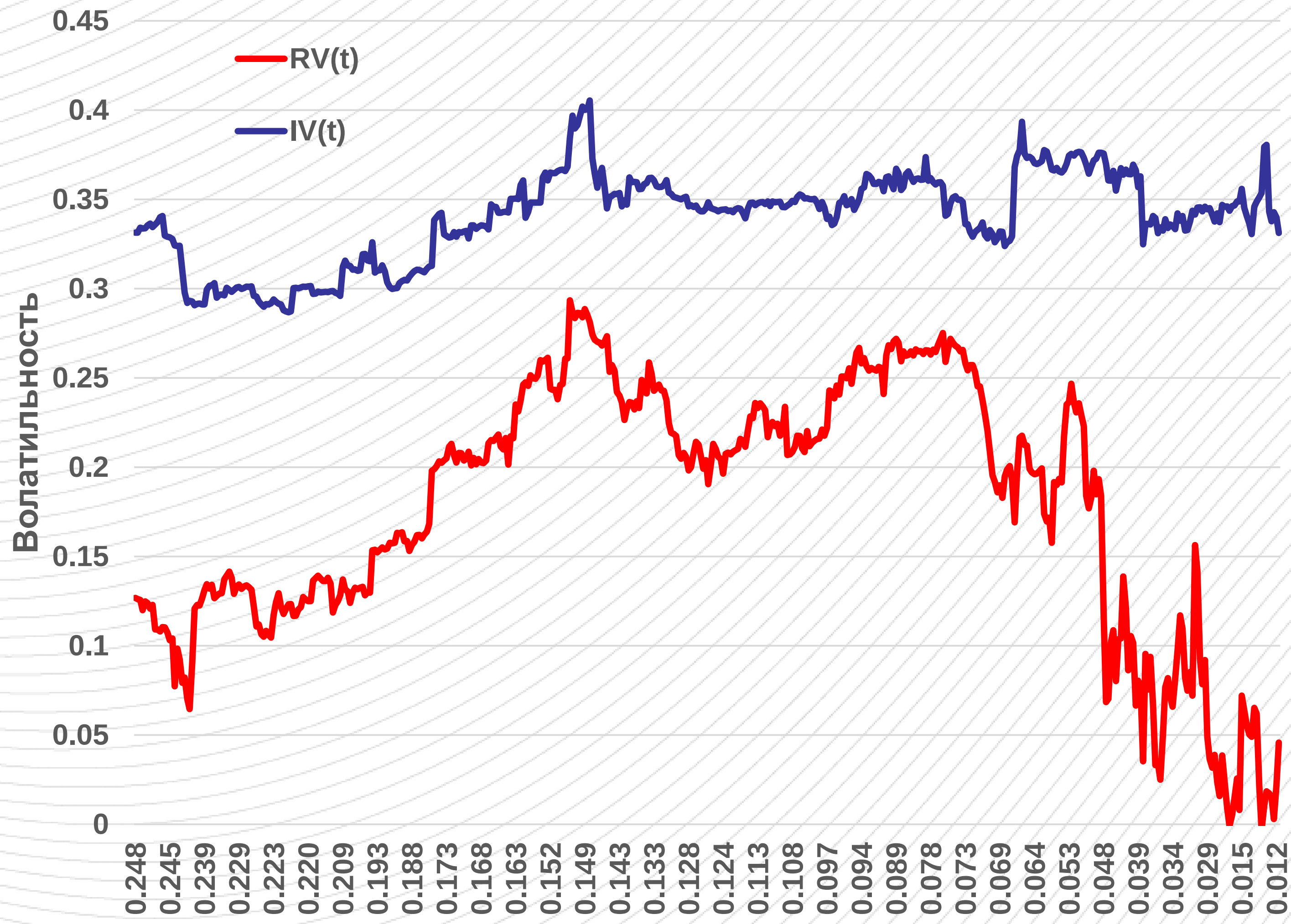
Откуда имеем

$$RV \cong -\frac{e^{-RT}}{p(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \int_{+0}^{T} \frac{dp(t)}{dt} \cdot \Delta_C(t) dt + \frac{e^{-RT}}{p(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \begin{cases} p(T) - p(0), & \text{если } p(T) > p(0) \\ 0, & \text{если } p(T) \le p(0) \end{cases}$$

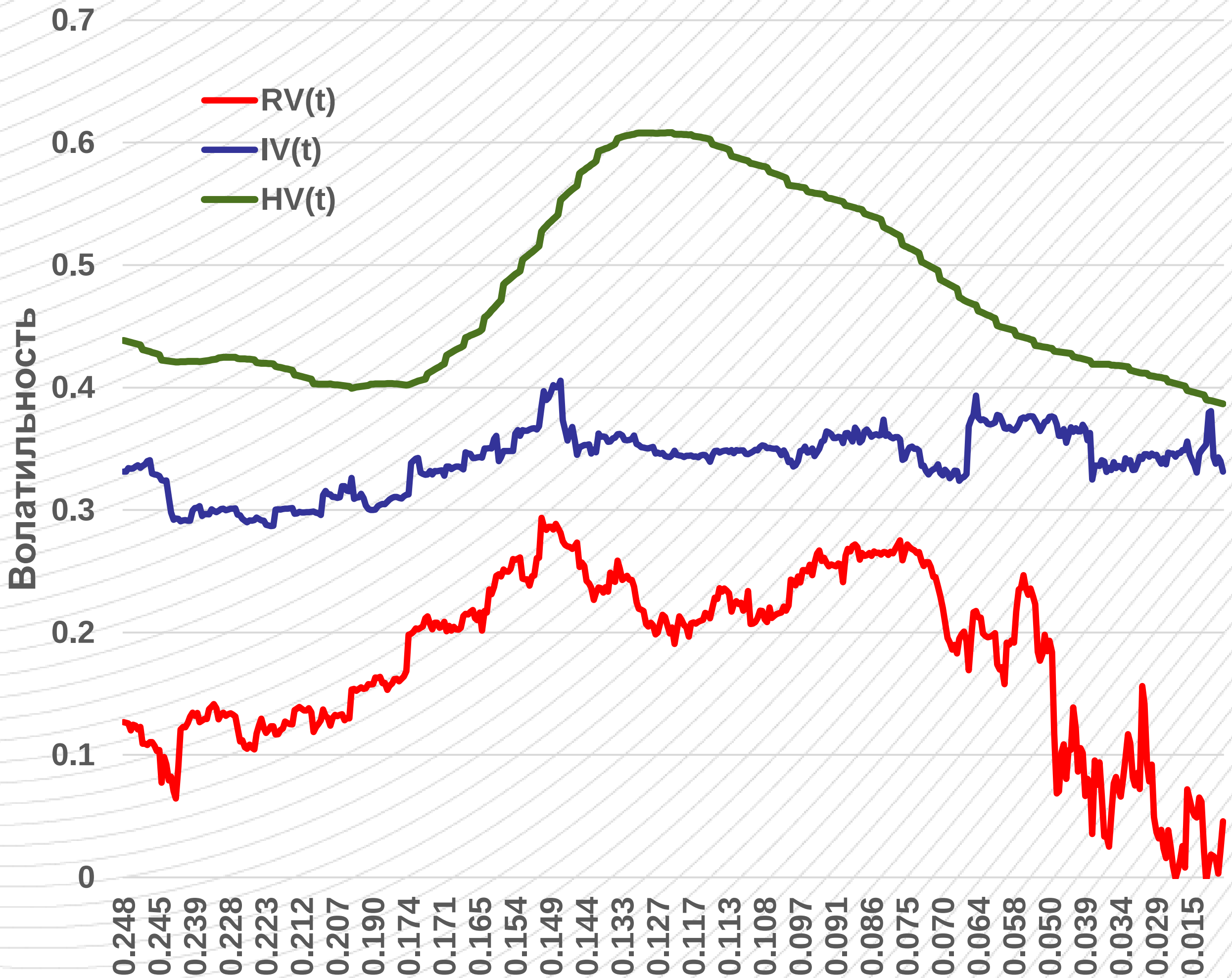
RV(t) для мартовской серии ATM-опционов на SRH5



RV(t) и IV(t) для мартовской серии ATM-опционов на SRH5



HV(t), RV(t) и IV(t) для мартовской серии ATM-опционов на SRH5



Выводы

1. Существенные различия между реализованной и подразумеваемой волатильностями, видимые нами на картинках, говорят о том, что процесс дельта-хеджирования для рассмотренной ситуации был сильно убыточным для покупателей волатильности и сильно прибыльным для продавцов.

Такие, а также и обратные ситуации, - не редкость на опционном рынке.

Они определяют положительный или отрицательный поток от процесса дельта-хеджирования, при том, что явного изменения (увеличения или уменьшения) волатильностей на рынке не наблюдается.

Это одна из неэффективностей рынка, которая при правильной идентификации систематически приносит прибыль от процесса дельта-хеджирования. Ну или покупки (продажи) тэты – кому как больше нравится.

Выводы

2. Реализованная волатильность, как отражение PnL процесса дельта-хеджирования есть функционал будущей траектории движения доходностей и дельты опционной позиции. Таким образом мы имеем зависимость RV от страйка, времени до исполнения опциона и используемой для определения дельты текущей волатильности.
3. Согласно нашим опытам и моделированию, PnL процесса дельта-хеджирования практически не зависит от способа исполнения хеджа.

4. PnL процесса дельта-хеджирования более сильно зависит от способа учета волатильности в дельте опциона Call, используемой в качестве подынтегрального множителя, чем от способа рехеджа.

5. Еще более сильно PnL процесса дельта-хеджирования зависит от будущей траектории движения рынка, чем от выбора волатильности по которой производится хеджирование.

Спасибо за внимание

Владимир Твардовский,
Управляющий директор ООО «УК «Финам менеджмент»
v.tvardovsky@corp.finam.ru

Управляющий фондом Quantum Parity:
https://www.facebook.com/QuantumParity/?fref=ts